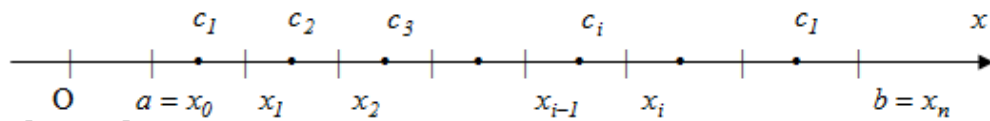


№3- дәріс. Анықталған интеграл Кейбір функцияларды интегралдау

Анықталған интегралдың анықтамасы $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде анықталсын, мұнда $a < b$. Төменгі амалдарды орындаймыз.

1. $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$) нүктелері мен $[a, b]$ кесіндісін n элементар кесінділерге (бөліктерге) бөлеміз: $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$



2. Әрбір $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ элементар кесіндінің ішінде жатқан кез келген бір $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ нүктесін аламыз және осы нүктедегі функцияның мәнін есептейміз, яғни $f(c_i)$ шамасын табамыз.

3. Функцияның табылған $f(c_i)$ мәндерін сәйкес элементар кесінділердің ұзындығына, яғни $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ көбейтеміз: $f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

4. Барлық осындай көбейтінділердің S_n қосындысын құрамыз:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \quad (14.1)$$

(14.1) қосындысы $y = f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісіндегі **интегралдық қосындысы** деп аталады. Элементар кесінділердің ең үлкен ұзындығын λ деп белгілейміз: $\lambda = \max \Delta x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

5. $n \rightarrow \infty$ ұмтылғанда, яғни $\lambda \rightarrow 0$ ұмтылғанда (14.1) интегралдық қосындысының шегін табамыз. Егер (14.1) – интегралдық қосындысы үшін ақырлы шек бар болып, ол $[a, b]$ кесіндісін дербес бөліктерге бөлу жолына және c_i нүктелерін тандап алу тәсіліне тәуелсіз болса, онда ол шекті $f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісіндегі **анықталған интегралы** деп атайды және оны $\int_a^b f(x)dx$ символымен белгілейді. Сонымен,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

Мұндағы a санын – интегралдың төменгі шегі, ал b санын – жоғары шегі дейді. $f(x)$ – интеграл астындағы функция, $f(x)dx$ – интеграл астындағы өрнек деп аталады.

Егер $\int_a^b f(x)dx$ саны бар болса, онда $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде интегралданатын функция деп аталады. Енді анықталған интегралдың бар болуы туралы теореманы келтірейік.

Теорема (Коши). Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда оның осы аралықта анықталған интегралы $\int_a^b f(x)dx$ бар. Егер $y = f(x)$ функциясының $[a, b]$ аралығында санаулы бірінші текті үзіліс нүктелері болса, онда бұл функция $[a, b]$ аралығында интегралданады.

Анықталған интегралдың анықтамасынан шығатын оның кейбір қасиеттері:

1. Анықталған интеграл өзінің интегралдау айнымаласына тәуелді емес, ол тек интегралдың шектері мен $f(x)$ функциясынан тәуелді, яғни

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \dots \int_a^b f(z)dz,$$

2. Егер $b = a$ болса, онда $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. Кез келген нақты C саны үшін $\int_a^b Cdx = C(b-a)$

Анықталған интегралдың қасиеттері.

Бұл бөлімде интегралданатын функцияларды қарастырамыз.

1. $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$, мұнда C – нақты сан

2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(t)dt$

4. Егер $a < c < b$ теңсіздігі орындалса, онда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

5. Егер $[a, b]$ кесіндісінде $f(x) \leq g(x)$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

6. **Орта мән туралы теорема.** Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $[a, b]$ кесіндісінен $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ теңдігі орындалатындай c саны

табылады

Ньютон–Лейбниц формуласы Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде интегралданатын болса, онда ол осы кесіндінің ішінде жатқан кез келген $[a, x]$ кесіндісінде де интегралданады $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, мұнда $x \in [a, b]$ функциясын қарастыралық.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $\Phi(x)$ функциясы да $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болады

Теорема. $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын. Онда

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

Салдар $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болған кез-келген $f(x)$ функциясының осы кесіндіде алғашқы функциясы бар, ол $\Phi(x)$ функциясына тең. Енді интегралды есептеудің негізгі формуласы **Ньютон–Лейбниц формуласына** көпелік

Негізгі теорема. $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $y = F(x)$ оның осы кесіндідегі алғашқы функциясы болсын. Онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (14.2)$$

(14.2) формуласы **Ньютон–Лейбниц формуласы** деп аталады. Ньютон–Лейбниц формуласы анықталған интегралды есептеу үшін өте қолайлы құрал. Оны қолдану үшін интеграл астындағы жатқан функцияның бір алғашқы функциясын білу жеткілікті.

1-мысал $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}$.

Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру.

Теорема $x = \varphi(t)$ функциясының $[\alpha, \beta]$ кесіндісінде үзіліссіз туындысы бар және $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ болсын, ал $y = f(x)$ функциясы $x = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ түрінде берілген әрбір x нүктесінде үзіліссіз болсын. Сонда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (14.3)$$

теңдігі әрқашанда орындалады (14.3) формуласы анықталған интеграл үшін **айнымалыны алмастыру формуласы** деп аталады

2-мысал $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ интегралын есептеу керек

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left| x = \sin t, dx = \cos t dt; x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow \sin t=1 \Rightarrow \left(t = \frac{\pi}{2} \right) \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$\frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Анықталған интегралды бөліктеп интегралдау.

Теорема $u = u(x)$ және $v = v(x)$ функцияларының $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз туындылары бар болсын. Онда

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx.$$

Бұл теңдікті қысқаша түрде былай да жазуға болады

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (14.4)$$

(14.4) анықталған интегралды **бөліктеп интегралдау формуласы** деп аталады

$$\begin{aligned} \text{3-мысал} \quad \int_1^e x \ln x dx &= \int_1^e \ln x d \frac{x^2}{2} = \left| u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{x^2}{2} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{e^2}{2} \ln e - 0 - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$